REGLAS DE BORDA GRADUALES:

DISEÑO E IDONEIDAD

GARCÍA LAPRESTA, José Luis
Departamento de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
correo-e: lapresta@eco.uva.es

MARTÍNEZ PANERO, Miguel
Departamento de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
correo-e: panero@eco.uva.es

RESUMEN

La regla de Borda es un método de votación en el que, a partir de las preferencias ordinarias entre pares de alternativas por parte de los agentes, éstos otorgan puntuaciones a dichas alternativas. En el modelo tradicional los valores numéricos de los que disponen los agentes no son arbitrarios, sino que recorren un rango discreto de valores. Sin embargo es posible permitir un mayor grado de libertad a los agentes admitiendo que puedan mostrar intensidades de preferencia al comparar entre pares de alternativas. Ello conduce de manera natural a generalizaciones graduales la regla de Borda basadas en relaciones de preferencias difusas, en las que el rango posible de puntuaciones otorgadas pasa a ser continuo. En el presente trabajo se perfilan algunas de estas posibles extensiones. Se estudiarán comparativamente distintas propiedades de las generalizaciones propuestas de la regla de Borda, particularmente en relación con el criterio de Condorcet y con la coherencia con la que los votantes establecen sus preferencias y a partir de ellas otorgan puntuaciones, y se analizará la idoneidad de las variantes tratadas.

Palabras clave: Regla de Borda, preferencias difusas, transitividades difusas, ganador de Condorcet, perdedor de Condorcet.

INTRODUCCIÓN

La regla de Borda, tal como fue concebida, es un procedimiento de votación por el que los agentes han de ordenar linealmente las distintas alternativas y asignarles correlativamente puntuaciones escalonadas, decidiendo el mayor cómputo total obtenido cuál es la ganadora. Debido a su diseño, el método supone un incremento de flexibilidad respecto del de pluralidad, más monolítico, en el que sólo una alternativa es votada. Más técnicamente, si hay *m* candidatos y cada votante dispone de un espectro de *m* valores numéricos para asignar a cada uno de ellos, la regla de pluralidad ofrece a cada agente el rango de puntuaciones $\{1,0,\dots,0\}$, mientras que la regla de Borda juega con los valores $\{m-1, m-2,\dots,0\}$.

En García Lapresta – Martínez Panero (2003) generalizamos la regla de Borda a situaciones en las que los agentes pueden manifestar indiferencia entre alternativas, lo cual supone un rango discreto de puntuaciones posibles que extiende el del procedimiento clásico. Aún así, este tratamiento no refuta una de las primeras críticas de las que fue objeto la regla de Borda, al denunciar que la elección de los valores a otorgar por los agentes es arbitraria por coartar la libertad del votante y no representar con fidelidad el mérito del votado. Aunque tal argumento trató de ser rebatido, entre otros, por el propio Borda así como por el matemático ilustrado español Morales[1], la crítica perdura. En este trabajo la asumimos y nos proponemos ampliar a un rango continuo los espectros discretos de puntuaciones de la regla de Borda considerados hasta ahora.

De hecho, en las obras de cada uno de estos precursores de la Teoría de la Elección Social (TES) están, si bien todavía en embrión, las bases para el enfoque gradual que desarrollaremos a continuación, en el que el uso de “intensidades de preferencia” trasciende y mejora sustancialmente el estrecho marco informacional que proporcionan las preferencias ordinarias de los agentes consideradas en la regla de Borda clásica, así como en sus extensiones discretas tratadas en García Lapresta – Martínez Panero (2003). Efectivamente, tal idea de graduación aparece ya prefigurada en los citados autores. Así, Borda supone como petición de principio que “los grados de mérito ó de

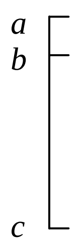
[1] Los autores citados señalaron que las puntuaciones otorgadas por cada agente mediante la regla de Borda no son en absoluto arbitrarias, sino que indican, respecto de la alternativa evaluada, el número de las que son peores que ella para dicho agente.

preferencia entre los Candidatos son iguales y reputados por iguales en la opinión de los Censores [Votantes]”[2], dando a entender implícitamente que podrían ser distintos. De otro lado, Morales (1797, pp. 8 y 32) puede constituir también un antecedente cuando afirma que “no hay mas que un método exâcto, y por consiguiente justo de elegir, y es el metodo que podemos llamar de *compensacion*, el qual compara y pesa los grados de opinion del mismo modo que en una balanza se comparan diferentes pesos para conocer aun la mas pequeña diferencia que haya entre ellos. [...] La opinion no es cosa que se numera ó cuenta, sino que se pesa”. Más adelante Morales (1797, p. 49) llama “eleccion *justa* á [...] aquella en que cada elector haya asignado á cada candidato el grado de aprecio, que *segun su juicio* le merece en comparacion con los demas”.

Los anteriores argumentos son históricamente los primeros que avalan el auge que ha tenido y tiene cada vez más en el marco de la TES el que los agentes puedan manifestar intensidades de preferencia al comparar pares de alternativas. Así, por ejemplo, Straffin Jr. (1980) dedica el capítulo 3 de su monografía al estudio de recientes enfoques de la teoría del voto usando intensidades de preferencia. A continuación hacemos un repaso de alguna de las justificaciones teóricas de tal uso, siguiendo el ejemplo considerado por dicho autor.

Considérese la siguiente situación relativa a uno de los agentes que deben manifestarse acerca de 3 alternativas (Straffin Jr. (1980, p. 47)):

1 votante



“Las posiciones de las alternativas en la línea vertical representan intensidades de preferencia. [...] Las intensidades relativas ilustradas en el ejemplo se conocen como ‘utilidades cardinales’, en contraposición con las ‘utilidades ordinales’ que sólo indican el orden en que están dispuestas las alternativas”.

[2] Cf. López de Peñalver [1799] (1992, p. 59).

La primera de las interpretaciones de estas intensidades de preferencia se debe a la escuela que parte de Von Neumann – Morgenstern (1954) como texto seminal de la Teoría de Juegos. Straffin Jr. (1980, p. 48) indica que “si el [...] votante coloca la alternativa *b* a $\frac{4}{5}$ de camino hacia *a* [desde *c*, siendo la distancia total unitaria], es porque el votante sería indiferente entre elegir a b con probabilidad 1, o bien elegir una lotería que ofreciese *a* con probabilidad $\frac{4}{5}$ y *c* con probabilidad $\frac{1}{5}$”. Straffin Jr. no indica cómo se establecerían tales loterías cuando hay más de tres alternativas.

Un segundo enfoque sostiene que “los votantes pueden ser capaces de contestar de modo consistente a preguntas acerca de intensidades relativas, y *b* está colocada donde está porque el votante puede decir con pleno significado: ‘Mi preferencia por *b* sobre *c* es cuatro veces más fuerte que mi preferencia por *a* sobre *b*’. (Véase Fishburn (1970))”. Cabe decir que tales argumentos ya aparecen en Morales (1805).

Finalmente, “se puede pedir al votante que reparta 100 puntos entre las alternativas de modo que el reparto exprese sus preferencias. (véase Metfessel (1947)). Nuestro [...] votante podría dar 0 puntos a *c*, 44 a *b* y 56 a *a*”.

Nosotros, como es usual en la literatura específica de la TES relativa al tema que nos ocupa desde la extraordinaria eclosión de la lógica y la matemática difusa (“fuzzy”) a partir de Zadeh (1965), modelizaremos las intensidades de preferencia mediante relaciones de preferencia difusas donde se tienen en cuenta, y además de forma matizada, las comparaciones entre todos los posibles pares de alternativas. De tales relaciones de preferencia daremos una cumplida panorámica como sustrato teórico del presente trabajo. En todo caso, el tratamiento del mismo correrá paralelo al desarrollado en García Lapresta – Martínez Panero (2003) y, en cierta forma, su desarrollo vendrá forzado por el propio planteamiento de las reglas de Borda que se considerarán en el presente trabajo a partir del patrón clásico, por lo que, de nuevo, se sigue el esquema en dos etapas: contadores individuales – contador colectivo.

1. Prerrequisitos teóricos

A continuación se introducen algunos conceptos básicos de la teoría de subconjuntos difusos, necesarios para formular los procedimientos de votación propuestos en el trabajo.

1.1 Subconjuntos difusos

Dado un conjunto no vacío X, llamado *universo*, en la teoría ordinaria de conjuntos cualquiera que sea el subconjunto A de X, todo elemento de X o bien pertenece a A o, por el contrario, no pertenece; no existe otra posibilidad. Su *función característica*, $\mu_A : X \to \{0,1\}$, definida por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

indica que la transición entre pertenencia y no pertenencia es abrupta. Sin embargo, en la teoría de subconjuntos difusos tal transición es gradual. La función característica o *función de pertenencia* de un *subconjunto difuso* A del universo X es una aplicación $\mu_A : X \to [0,1]$, donde $\mu_A(x)$ es el *grado de pertenencia* de x a A. En consecuencia, la noción de subconjunto difuso generaliza la de subconjunto ordinario: un subconjunto difuso A de X es ordinario si y sólo si $\mu_A(X) \subseteq \{0,1\}$.

1.2 Relaciones binarias difusas

Al igual que las relaciones binarias ordinarias son un tipo concreto de subconjuntos ordinarios, las relaciones binarias difusas son un tipo determinado de subconjuntos difusos.

Definición 1. Dado un conjunto ordinario X, una *relación binaria difusa sobre* X es un subconjunto difuso del producto cartesiano $X \times X$. Si R es una relación binaria difusa sobre X con función de pertenencia $\mu_R : X \times X \to [0,1]$, se entenderá que $\mu_R(x,y)$ es la *intensidad* con la que x está relacionado con y.

Notación. Se considerará a partir de ahora un conjunto finito de alternativas mutuamente excluyentes, $X = \{x_1, ..., x_n\}$, sobre el que un agente arbitrario muestra sus preferencias, a través de una relación binaria difusa R sobre X. Con $r_{ij} = \mu_R(x_i, x_j)$ se indicará el nivel de intensidad con el que el agente prefiere la alternativa x_i a la x_j, que es tanto mayor cuanto más cercano esté a 1.

Observación 1. El valor $r_{ij} = \mu_R(x_i, x_j) \in [0,1]$ se suele entender en la literatura principalmente de dos maneras. Para algunos autores indica el grado de confianza con la que el agente prefiere (de manera estricta o bien débil) la alternativa x_i a la alternativa

x_j. Tal interpretación capta la idea de "vaguedad" o "ambivalencia" en la preferencia del agente en cuestión. Para otros autores, dicho valor denota la intensidad con que el agente prefiere x_i a x_j. Nosotros seguimos esta segunda interpretación. (Cf. García Lapresta – Llamazares (2000) para las respectivas referencias).

1.3 Relaciones de preferencia difusas

Cuando un agente se dispone a comparar un par de alternativas, lo primero que se plantea es si prefiere una de ellas a la otra o, por el contrario, le resultan indiferentes. Si tiene preferencia por una de ellas, podrá manifestar la forma o la intensidad con la que la prefiere, informando de cómo prefiere la que para él es mejor. Podríamos pensar, trasladado a este marco, en el símil de una balanza que sopesa las alternativas propuesto en Morales (1797). Suponiendo que el agente distribuye toda su capacidad de preferir, considerada unitaria, entre cada par de alternativas, cuanto mayor sea la intensidad r_{ij} con la que x_i es preferida a x_j, tanto menor será la intensidad r_{ji} con la que x_j es preferida a x_i (cuanto más se eleva un platillo de la balanza, más decae el otro). De esta forma, surge de forma natural el axioma de reciprocidad[3].

Definición 2. Una relación binaria difusa R sobre $X = \{x_1,..., x_n\}$ es *recíproca* si y sólo si $r_{ij} + r_{ji} = 1$ para cualesquiera $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.

Observación 2. Si R es recíproca, entonces se verifica $r_{ii} = 0.5$ para cualquier $i \in \{1,...,n\}$. Por otra parte, R puede representarse a través de una matriz que recoge las intensidades de preferencia entre las alternativas:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

A partir de ahora, por las razones expuestas anteriormente, se supondrá que toda relación binaria difusa que modelice las preferencias es recíproca.

[3] Sobre la justificación del axioma de reciprocidad véanse, entre otros, Bezdek – Spillman – Spillman (1978), Nurmi (1981), Tanino (1984) y García Lapresta – Llamazares (2000).

Definición 3. Una *relación de preferencia difusa* es una relación binaria difusa recíproca.

Definición 4. Para cada $\alpha \in [0,1)$, la relación de preferencia difusa R sobre X induce una *relación binaria ordinaria de nivel* (o *umbral*) *estricto* α dada por $x_i \succ_\alpha x_j \Leftrightarrow r_{ij} > \alpha$.

Observación 3. Conviene indicar que $\succ_\alpha$ es una relación de preferencia ordinaria (esto es, asimétrica) únicamente cuando $\alpha \geq 0.5$. En tal caso, la relación de indiferencia asociada a $\succ_\alpha$ viene dada por $x_i \sim_\alpha x_j \Leftrightarrow$ no ocurre $x_i \succ_\alpha x_j$ ni $x_j \succ_\alpha x_i$, o sea, $r_{ij} \leq \alpha$ y $r_{ji} \leq \alpha$. Por reciprocidad, ambas condiciones equivalen a que $1-\alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$. De este modo, si el umbral α se encuentra en el rango señalado, para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$ es cierta una y sólo una de las siguientes situaciones: $x_i \succ_\alpha x_j$ ($r_{ij} > \alpha$), $x_i \sim_\alpha x_j$ ($1-\alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$), $x_j \succ_\alpha x_i$ ($r_{ji} > \alpha$ o, lo que es lo mismo, $r_{ij} < 1-\alpha$).

En conexión con los comentarios anteriores es interesante señalar, como hacen por ejemplo García Lapresta – Llamazares (2000), que las relaciones binarias difusas generalizan las relaciones binarias ordinarias, ya que éstas se pueden entender como un caso particular de las anteriores cuando sólo toman valores en $\{0,1\} \subset [0,1]$. Ahora bien, ninguna relación de preferencia difusa es ordinaria, ya que, como consecuencia de la reciprocidad, $r_{ii} = 0.5 \notin \{0,1\}$.

De entre todos los posibles umbrales $\alpha \in [0.5,1)$ que garantizan que $\succ_\alpha$ sea una relación de preferencia ordinaria, en lo que sigue tendremos como referencia el más pequeño de ellos, a saber, $\alpha = 0.5$. Tal elección se basa en consideraciones de simplicidad y en el hecho de que, en virtud de la reciprocidad de R, $r_{ij} > r_{ji}$ equivale a que $r_{ij} > 0.5$. Por tanto, tomando $\alpha = 0.5$ para definir la relación de preferencia ordinaria $\succ_\alpha$ asociada a R, se consigue indicar qué alternativas son preferidas respecto a otras por el agente en cuestión. Volviendo a la imagen de la balanza, R matiza perfectamente cuánto es preferida una alternativa a otra (cuanto más se inclina la balanza hacia el lado de un objeto que hacia el otro), mientras que $\succ_{0.5}$ sólo indica qué alternativa es preferida respecto de otra, sin matices (qué objeto pesa más, es decir, únicamente si la balanza se inclina hacia el platillo ocupado por dicho objeto, sin tomar en consideración cuánto se inclina). Estos comentarios propician la siguiente definición, que no es sino un caso particular de la Definición 4, con el matiz de que ahora el artículo determinado "la" especifica justamente que estamos tomando, de entre todos los valores posibles $\alpha \in [0.5,\ 1)$, justamente $\alpha = 0.5$ por las razones señaladas.

Definición 5. Toda relación de preferencia difusa R induce la relación de preferencia ordinaria sobre X dada por $x_i \succ_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} > 0.5$.

Notación. Denotaremos por $\sim_{0.5}$ y $\succcurlyeq_{0.5}$ a las correspondientes relaciones de indiferencia y preferencia débil, a saber: $x_i \sim_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} = 0.5$; $x_i \succcurlyeq_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} \geq 0.5$.

Observación 4. Tomar el umbral $\alpha = 0.5$ simplifica considerablemente las tres situaciones posibles a las que aludíamos antes referentes a un par genérico de alternativas: $x_i \succ x_j$ $(r_{ij} > 0.5)$, $x_i \sim x_j$ $(r_{ij} = 0.5)$, $x_j \succ x_i$ $(r_{ij} < 0.5)$.

Notación. Cuando nos encontremos ante una situación decisional en la que *m* agentes muestren sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, ..., x_n\}$ mediante relaciones de preferencia difusas $R^1, R^2, \ldots, R^m$, denotaremos mediante superíndices los conceptos hasta ahora introducidos cuando hagan referencia a un agente genérico $k \in \{1, \ldots, m\}$. De este modo, $r_{ij}^k = \mu_{R^k}(x_i, x_j) \in [0,1]$ indica la intensidad de preferencia con que el agente *k* prefiere la alternativa x_i a la x_j; $\succ_{0.5}^k$ denota la relación de preferencia ordinaria inducida por R^k, etc. Por la importancia que tendrá en el desarrollo posterior, particularizamos para el agente *k* la noción de matriz de intensidades de preferencia ya apuntada.

Definición 6. Dada R^k, relación de preferencia difusa del agente $k = 1, \ldots, m$, consideraremos la *matriz de intensidades de preferencia* de dicho agente:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \ldots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \ldots & r_{2n}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \ldots & r_{nn}^k \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes simétricos respecto de la diagonal principal suman 1, y los elementos diagonales toman el valor 0.5.

1.4 Transitividades difusas

En esta sección se tratan diversas hipótesis de racionalidad difusa relativas a las preferencias graduales de los agentes. La razón de ello estriba en que las reglas de Borda graduales que se introducen en el presente trabajo se basan en tales preferencias, y de la coherencia mostrada por los agentes (o su carencia) al manifestarse sobre las alternativas depende la idoneidad de los contadores de Borda diseñados.

Definición 7. Sea $*$ una operación binaria en [0.5, 1] con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $a * b = b * a$ para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$.
- No decrecimiento en cada componente: $(a \leq a'$ y $b \leq b') \Rightarrow a * b \leq a' * b'$ para cualesquiera $a, a', b, b' \in [0.5,\ 1]$.
- Continuidad: Si dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0.5, 1]$ verifican $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b,$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n * b_n = a * b.$

Una relación de preferencia difusa R sobre X es *max-*$*$ *transitiva débil estricta* si y sólo si cumple:

$$(r_{ij} > 0.5 \ \text{ y } \ r_{jl} > 0.5) \Rightarrow (r_{il} > 0.5 \ \text{ y } \ r_{il} \geq r_{ij} * r_{jl})$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_l \in X$.

A continuación introducimos una transitividad análoga a la anterior, en la que se contempla el caso de indiferencia en los eslabones de la cadena de preferencias, y que denominamos por esta razón “no estricta”.

Definición 8. Dada una operación binaria $*$ en [0.5, 1] con las propiedades consignadas anteriormente, una relación de preferencia difusa R sobre X es *max-*$*$ *transitiva débil no estricta* si y sólo si cumple:

$$(r_{ij} \geq 0.5 \ \text{ y } \ r_{jl} \geq 0.5) \Rightarrow \ r_{il} \geq r_{ij} * r_{jl}$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_l \in X$.

De entre las operaciones $*$ utilizadas en la literatura para modelizar la racionalidad consideraremos las siguientes propuestas de Zadeh (1971) y Bezdek – Harris (1978), entre otros:

$$a *_1 b = \min\{a,b\}, \quad a *_2 b = \frac{a+b}{2}, \quad a *_3 b = \max\{a,b\}.$$

Definición 9. $\hat{T}_i(X)$ denotará el conjunto de relaciones de preferencia difusas sobre X que verifican max-$*_i$ transitividad débil estricta, $i = 1, 2, 3$. Así mismo, usaremos la notación $\overline{T}_i(X)$ para las correspondientes transitividades débiles no estrictas.

Observación 5. Puesto que para cualesquiera $a, b \in [0,1]$ se verifica

$$\min\{a,b\} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max\{a,b\},$$

$$(a > 0.5,\ b > 0.5) \Rightarrow \min\{a,b\} > 0.5$$

y

$$(a \geq 0.5,\ b \geq 0.5) \Rightarrow \min\{a,b\} \geq 0.5,$$

se tiene:

$$R \in \hat{T}_3(X) \Rightarrow R \in \hat{T}_2(X) \Rightarrow R \in \hat{T}_1(X) \Rightarrow \succ_{0.5} \text{ transitiva},$$

$$R \in \overline{T}_3(X) \Rightarrow R \in \overline{T}_2(X) \Rightarrow R \in \overline{T}_1(X) \Rightarrow \succcurlyeq_{0.5} \text{ transitiva}.$$

Por otro lado, son triviales las implicaciones

$$R \in \overline{T}_i(X) \Rightarrow R \in \hat{T}_i(X), \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Denotaremos por $\hat{T}_0(X)$ al conjunto de relaciones binarias difusas tales que $\succ_{0.5}$ es transitiva (respectivamente por $\overline{T}_0(X)$ a aquéllas tales que $\succcurlyeq_{0.5}$ es transitiva). Así mismo, por abuso de lenguaje, diremos que R es $\overline{T}_i$ (respectivamente $\hat{T}_i$) para significar $R \in \overline{T}_i(X)$ (respectivamente, $R \in \hat{T}_i(X)$), para $i = 0, 1, 2, 3$.

Observación 6. Algunas de las transitividades consignadas anteriormente aparecen en la literatura con otras denominaciones que no deben llevar a confusión. La transitividad max-$*$ para R se define inicialmente exigiendo $r_{il} \geq r_{ij} * r_{jl}$. La apostilla "débil" (o "restringida", que nosotros no emplearemos para evitar confusiones) se debe a condiciones consideradas por Tanino (1984) y Dasgupta – Deb (1996), entre otros, cuando se requieren ciertas hipótesis adicionales. En nuestro caso, éstas consisten en considerar las intensidades de preferencia que aparecen en las definiciones anteriores mayores que 0.5 en el caso que hemos denominado estricto, y mayores o iguales que 0.5 en el caso no estricto. Por otro lado, Fishburn (1973), en un contexto probabilístico en buena parte extrapolable al difuso, habla de transitividades estocásticas fuertes (que corresponderían a las $\overline{T}_3$), moderadas (que coinciden con las $\overline{T}_1$), débiles (homólogas de las $\overline{T}_0$) y también alude a una "versión fuerte" de la transitividad estocástica fuerte, que es la asociada a nuestra $\widehat{T}_3$. A este respecto véase también De Baets – De Meyer – De Schuymer – Jenei (2003).

Observación 7. No es difícil verificar que la transitividad de $\succcurlyeq_{0.5}$ equivale a las de $\succ_{0.5}$ y $\sim_{0.5}$ conjuntamente. Ahora bien, la transitividad de la indiferencia ha sido puesta en tela de juicio por Luce (1956), basándose en el hecho empíricamente constatable de la existencia de umbrales de percepción de los agentes.

Observación 8. Hacemos notar que una relación de preferencia difusa $R \in \widehat{T}_3(X)$ (respectivamente $R \in \overline{T}_3(X)$) no admite caídas de intensidad de preferencia en alternativas x_i, x_j, x_l conectadas de forma que cada una sea preferida a la siguiente según $\succ_{0.5}$ (respectivamente según $\succcurlyeq_{0.5}$).

1.5 Mayorías simples generalizadas a partir de preferencias difusas

La mayoría simple se considera generalmente como un método de decisión idóneo cuando concurren sólo 2 candidatos, hecho éste avalado por el teorema de May (1952). Resulta por ello ser la base teórica en que se sustenta el principio de Condorcet, y la principal de las críticas recibidas por la regla de Borda clásica es el vulnerar tal principio. En otras palabras, un ganador por el método de Borda podría ser vencido por mayoría simple por algún otro candidato para el colectivo de votantes, hecho éste que en buena medida cuestiona la legitimidad del ganador de Borda.

En esta sección se propone un tratamiento paralelo al de García Lapresta – Martínez Panero (2003), aunque veremos que la generalización del caso clásico al difuso no es única. Así, en primera instancia, se define una *mayoría simple generalizada en sentido amplio* en virtud de la cual la alternativa x_i vence a la alternativa x_j si se cumple

$$\sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{k} > \sum_{k=1}^{m} r_{ji}^{k},$$

es decir, si la suma de todas las intensidades de preferencia (u opiniones) de los agentes sobre la alternativa x_i al ser confrontada con la alternativa x_j pesa más que si se intercambian los papeles de las alternativas.

Ahora bien, otra posibilidad legítima interpreta que sólo deben sumarse intensidades de preferencia cuando la correspondiente ordinaria inducida es estricta; en otras palabras, sólo deben ser computadas las opiniones favorables relativas a una alternativa al ser comparada con su oponente[4]. De este modo, la alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido restringido* cuando

$$\sum_{\substack{k=1 \\ x_i \succ_{0.5}^k x_j}}^{m} r_{ij}^k > \sum_{\substack{k=1 \\ x_j \succ_{0.5}^k x_i}}^{m} r_{ji}^k .$$

Se entiende en lo sucesivo que si algún sumatorio está indexado en el conjunto vacío, su valor es nulo.

Como en el caso clásico, es usual recoger los datos anteriores relativos a cada agente en la matriz de intensidades de preferencia

$$\left(r_{ij}^k\right) = \begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \dots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \dots & r_{2n}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \dots & r_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

A partir de la información contenida en esta matriz de intensidades de preferencia individual hay dos posibilidades de agregarla, atendiendo a los enfoques apuntados.

- Definiendo una *matriz agregada en sentido amplio* como suma de las matrices de intensidades de preferencia individuales:

$$\left(\overline{r}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(r_{ij}^k\right).$$

- Definiendo una *matriz agregada* como suma condicionada (denotada por $\oplus$) de las matrices de intensidades de preferencia individuales, donde sólo se suman intensidades de preferencia estrictamente mayores que 0.5:

[4] El tratamiento en sentido amplio es el considerado en Marchant (1996, pp. 28-29), mientras que, en un contexto de toma de decisiones mediante etiquetas lingüísticas, el enfoque restringido ha sido tenido en cuenta en García Lapresta (en prensa).

$$\left(\hat{r}_{ij}\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \left(r_{ij}^{k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ r_{ij}^{k} > 0.5}}^{m} (r_{ij}^{k}).$$

De nuevo, en la anterior definición se sopesan las intensidades con que la alternativa x_i es preferida a x_j conforme a la relación de preferencia inducida $\succ_{0.5}^{k}$ de cada agente.

La definición (y notación) de margen generalizado (ya sea o no en sentido amplio) entre dos alternativas generaliza la del caso clásico (véase García Lapresta – Martínez Panero (2003)), pero ahora puede tomar valores no enteros. De esta forma:

- La alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido amplio* cuando el *margen en sentido amplio* $\overline{\mathrm{mg}}(i, j) = \overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji}$ es positivo.
- La alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido restringido* cuando el *margen en sentido restringido* $\widehat{\mathrm{mg}}(i, j) = \hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji}$ es positivo.

2. Formulaciones de la regla de Borda gradual

En esta sección se extienden los contadores de Borda al caso gradual, y se mostrarán varias posibilidades de generalización en las que la toma de decisiones colectiva depende en cada caso de qué tipo de intensidades de preferencia de los agentes sean computadas. Hemos de notar que también Marchant (1996 y 2000), de forma similar, ha realizado un enfoque gradual del método de Borda, aunque más restrictivo que el nuestro, y en su caso, a partir de planteamientos de toma de decisiones multicriterio.

2.1 Extensiones graduales de la regla de Borda en sentido amplio

Hay varias formas de extender el contador de Borda clásico individual del agente $k \in \{1,...,m\}$ al caso en que éste manifieste gradualmente sus inclinaciones, recogidas en la matriz de intensidades de preferencia $\left(r_{ij}^{k}\right)$.

Antes de entrar en su formalización debemos indicar que las que aparecen en este apartado las hemos denominado *extensiones en sentido amplio*, empleando la misma expresión ya acuñada para las mayorías simples generalizadas, ya que consideran todas las intensidades de preferencia de los agentes[5], la suma de las cuales constituye la matriz agregada en sentido amplio $\left(\overline{r}_{ij}\right)$. A su vez, en la notación introducida para estos contadores graduales se trata de mantener en paralelo la analogía con los contadores discretos considerados en García Lapresta – Martínez Panero (2003).

Definición 10. Dada una alternativa $x_i \in X$, se definen los *contadores graduales de Borda individuales en sentido amplio* $\overline{r}_k^{\,v}(x_i),\ v=1,\ldots,4$, con los que el agente k asigna una puntuación a la alternativa x_i de la forma que sigue:

- $\overline{r}_k^{\,1}(x_i) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k$,
- $\overline{r}_k^{\,2}(x_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}^k$,
- $\overline{r}_k^{\,3}(x_i) = \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} r_{ij}^k$ (*Primer contador de Black en sentido amplio*),
- $\overline{r}_k^{\,4}(x_i) = \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} r_{ij}^k - \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} r_{ji}^k$ (*Segundo contador de Black en sentido amplio*).

La razón de introducir el primer contador es de completitud formal, ya que su homólogo en el caso discreto se define como

$$r_k^1(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k;$$

ahora bien, desde un punto de vista computacional, este último contador se puede reescribir como

$$r_k^1(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k,$$

sumando únicamente unos y ceros (es decir preferencias estrictas), y obviando las indiferencias (0.5). Es ésta la expresión que tomamos ahora como patrón (la que, además, tiene en cuenta las indiferencias será considerada en la siguiente subsección).

[5] En otro contexto, este tratamiento ya ha sido considerado en García Lapresta – Llamazares (2003).

Observamos, no obstante, que tal contador que en el caso discreto es perfectamente natural y extiende a órdenes no lineales la idea de Borda y Morales de contabilizar el número de alternativas peores que la que se evalúa, tiene ahora por el contrario, en este contexto gradual, un carácter *ad hoc*, al eludir en los sumatorios las intensidades 0.5.

Parece, por tanto, más adecuado considerar el segundo contador, que suma todas las intensidades de preferencia entre la alternativa que el agente k está evaluando y las demás (incluida ella misma).

El tercer contador mantiene la fórmula anterior, pero excluye, por no aportar información relevante, la comparación de una alternativa consigo misma[6].

Por fin, se puede considerar nuestro cuarto contador. Junto con el anterior, fueron estudiados en Black (1958 y 1976) en el caso discreto. Aunque en rigor y por paralelismo habría que definirlo como $\overline{r}_k^{\,4}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ji}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ji}^k$, eludimos, por las razones indicadas referentes al primer contador, esta expresión, equivalente a la dada.

Es evidente la relación $\overline{r}_2^{\,k}(x_i) = \overline{r}_3^{\,k}(x_i) + 0.5.$ Y para los contadores tercero y cuarto introducidos se verifica una fórmula idéntica a la del caso discreto. La demostración que damos a continuación, comparativamente mucho más sencilla que la de Black (1976) en su contexto, se basa en el axioma de reciprocidad.

Proposición 1. Para los contadores de Black graduales en sentido amplio se verifica la relación

$$\overline{r}_k^{\,4}(x_i) = 2\,\overline{r}_k^{\,3}(x_i) - (n-1).$$

Demostración:

$$\overline{r}_k^{\,4}(x_i) = \sum_{j\neq i=1}^{n} r_{ij}^k - \sum_{j\neq i=1}^{n} r_{ji}^k = \sum_{j\neq i=1}^{n} (r_{ij}^k - r_{ji}^k) = \sum_{j\neq i=1}^{n} (r_{ij}^k - (1 - r_{ij}^k)) = \sum_{j\neq i=1}^{n} (2r_{ij}^k - 1) = 2\sum_{j\neq i=1}^{n} r_{ij}^k - (n-1) =$$
$$2\overline{r}_3^{\,k}(x_i) - (n-1). \quad \blacksquare$$

Conviene señalar que mientras los contadores de Borda considerados en García Lapresta – Martínez Panero (2003) sólo recorren un rango discreto de valores, las

---

[6] Notemos así que el primer contador excluye todas las indiferencias, el tercero sólo la indiferencia de una alternativa consigo misma, y el segundo no excluye ninguna de las indiferencias.

puntuaciones de los contadores de Borda graduales (en sentido amplio) recorren intervalos, es decir todos los valores intermedios entre las puntuaciones extremas asignables se pueden alcanzar. Más concretamente, los contadores primero y tercero pueden tomar valores en $[0,\ n-0.5]$; el segundo en $[0.5,\ n-0.5]$; y el cuarto en $[-(n-0.5),\ n-0.5]$.

En cuanto al cómputo total de puntuaciones otorgadas por cada uno de los agentes se tienen relaciones análogas a las del caso discreto:

- $\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^1(x_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{i,j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} (r_{ij}^k + r_{ji}^k) \leq \binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$ (la igualdad se daría en el caso en que no hubiera indiferencia entre alternativas distintas).

- $\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k = \sum_{i,j=1}^{n} (r_{ij}^k + r_{ji}^k) = \binom{n}{2} + n \cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$.

- $\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^3(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_k^2(x_i) - 0.5) = \frac{n^2}{2} - n \cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2}$.

- $\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^4(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(2\overline{r}_k^3(x_i) - (n-1)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^3(x_i) - n(n-1) = 2\frac{n(n-1)}{2} - n(n-1) = 0.$

Hacemos notar que esta última fórmula es clave para probar las buenas propiedades de Condorcet de este último contador en el caso discreto y, como veremos, también lo será en este contexto.

Con estos contadores individuales se construye uno colectivo en cada caso:

$$\overline{\boldsymbol{r}}^v(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \overline{r}_k^v(x_i),\ v = 1, \ldots, 4.$$

Exceptuando el primero, los contadores colectivos considerados se pueden expresar mediante la matriz agregada $\left(\overline{r}_{ij}\right)$. Así:

- $\overline{\boldsymbol{r}}^2(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_{ij}$.

- $\overline{\boldsymbol{r}}^3(x_i) = \sum_{i \neq j=1}^{n} \overline{r}_{ij}$.

- $\overline{\boldsymbol{r}}^4(x_i) = \sum_{j=1}^{n}(\overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji}) = \sum_{j=1}^{n}\overline{\mathrm{mg}}(i, j).$

Además, conviene señalar que de las relaciones entre los correspondientes contadores individuales se deduce:

- $\overline{\boldsymbol{r}}^3(x_i) = \sum_{k=1}^{m}\left(\overline{r}_k^2(x_i) - 0.5\right) = \overline{\boldsymbol{r}}^2(x_i) - \frac{m}{2}.$

- $\overline{\boldsymbol{r}}^4(x_i) = \sum_{k=1}^{m}(2\overline{r}_k^3(x_i) - (n-1)) = 2\overline{\boldsymbol{r}}^3(x_i) - m(n-1) = 2\left(2\overline{\boldsymbol{r}}^2(x_i) - \frac{m}{2}\right) - m(n-1) =$

  $= 2\overline{\mathrm{r}}^2(x_i) - mn.$

Así, las relaciones de preferencia colectivas $P_v^{\overline{B}}$ vienen dadas por: $x_i P_v^{\overline{B}} x_j \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{r}}^v(x_i) > \overline{\boldsymbol{r}}^v(x_j),\ v = 1, \ldots, 4,$ y resultará(n) elegida(s) en cada caso la(s) alternativa(s) con mayor puntuación.

Ahora bien, de las relaciones anteriores se deduce que los contadores considerados, a excepción del primero, son equivalentes, es decir, inducen la misma relación de preferencia colectiva: $P_2^{\overline{B}} = P_3^{\overline{B}} = P_4^{\overline{B}}$.

El hecho de que el primer contador no es equivalente a los anteriores se pone de manifiesto a continuación[7].

Ejemplo 1. Supongamos que la matriz de intensidades de preferencia del agente k viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\overline{r}_k^1(x_2) = 0.6 < 0.8 = \overline{r}_k^1(x_3),$ pero $\overline{r}_k^2(x_2) = 1.6 > 1.3 = \overline{r}_k^2(x_3).$

[7] Aunque la equivalencia es una noción relativa a contadores colectivos, también la aplicaremos al caso de un único agente, y así hablaremos de contadores individuales equivalentes. Por esta razón, para justificar que dos reglas de Borda graduales introducidas son métodos de votación esencialmente distintos, bastará con probar el incumplimiento de la equivalencia para los respectivos contadores individuales.

2.2 Extensiones graduales de la regla de Borda clásica en sentido restringido

En este apartado, y por razones que siguen la misma filosofía que las mayorías simples generalizadas, consideraremos otras extensiones de la regla de Borda clásica donde el recorrido de los sumatorios con los que se definen las puntuaciones otorgadas será más restringido. Más concretamente, en este caso se considerarán esencialmente las intensidades de preferencia de los agentes mayores que 0.5, la suma de las cuales bajo esta condición constituye la matriz agregada $\left(\widehat{r_{ij}}\right)$. Así se atienden las preferencias ordinarias de las que derivan las correspondientes graduales (o si se quiere, se tienen en cuenta las preferencias ordinarias inducidas), como se detalla a continuación. Este enfoque ya ha sido tratado parcialmente en García Lapresta – Martínez Panero (2002).

La situación, que venimos repitiendo en cada escenario, es ahora la siguiente: para cada agente *k*, se desea construir un nuevo contador que evalúe cada alternativa teniendo en cuenta sus intensidades de preferencia. En el caso discreto, el valor dado por el contador individual era el número de las alternativas peores que la considerada teniendo en cuenta la relación de preferencia ordinaria del agente *k*, P^k. Ahora, en este contexto, este papel lo jugará la relación de preferencia ordinaria $\succ_{0.5}^k$ inducida por la relación de preferencia difusa R^k. Y también aquí, en la expresión de los siguientes contadores se sigue un discurso paralelo al de las extensiones discretas introducidas en García Lapresta – Martínez Panero (2003).

Definición 11. Dada una alternativa $x_i \in X$, se definen los *contadores graduales de Borda individuales en sentido restringido* $\hat{r}_k^v(x_i)$, $v = 1, \ldots, 4$, con los que el agente *k* asigna una puntuación a la alternativa x_i de la forma que sigue:

- $\hat{r}_k^1(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i \succ_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k,$
- $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i \not\succ_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \geq 0.5}}^{n} r_{ij}^k,$

- $\hat{r}_k^3(x_i) = \sum_{\substack{i \neq j=1 \\ x_i \succcurlyeq_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{i \neq j=1 \\ r_{ij}^k \geq 0.5}}^{n} r_{ij}^k$ *(Primer contador de Black en sentido restringido),*

- $\hat{r}_k^4(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i \succ_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \succ_{0.5}^k x_i}}^{n} r_{ji}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ji}^k > 0.5}}^{n} r_{ji}^k$ *(Segundo contador de Black en sentido restringido).*

El primer contador individual suma las intensidades de preferencia entre la alternativa considerada y las que son peores según $\succ_{0.5}^k$. De esta forma, el agente k asigna a la alternativa x_i un valor que corresponde a sumar los coeficientes mayores que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente.

La segunda extensión consiste en incorporar los empates entre alternativas (incluido el de toda alternativa consigo misma) en la fórmula anterior o, si se quiere, computar la suma de los coeficientes mayores o iguales que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente.

Los dos últimos contadores individuales extienden los de Black, formulados en el caso discreto. Así, Black I gradual restringido reproduce la fórmula anterior, excluyendo el empate de una alternativa consigo misma; o sea, que el agente k asigna a la alternativa x_i un valor que corresponde a sumar los coeficientes mayores o iguales que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente, a excepción del elemento diagonal.

Por fin, Black II gradual restringido pondera victorias menos derrotas (según $\succ_{0.5}^k$), lo que, en este caso, corresponde a suma de coeficientes mayores que 0.5 de la fila i-ésima menos la suma de coeficientes mayores que 0.5 de la columna i-ésima de la matriz de intensidades de preferencia del agente.

Observación 9. Es trivial la relación $\hat{r}_k^2(x_i) = \hat{r}_k^3(x_i) + 0.5$. Ahora bien, no se tiene una fórmula tipo Black que relacione Black I y Black II en sentido restringido, como se pondrá de manifiesto a continuación.

Ejemplo 2. Supongamos que la matriz de intensidades de preferencia del agente k viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.6 & 1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Las puntuaciones Borda según Black I resultan:

$$\hat{r}_k^3(x_1) = 0.7 + 0.6 + 1 = 2.3, \quad \hat{r}_k^3(x_2) = 0.5 + 0.8 = 1.3, \quad \hat{r}_k^3(x_3) = 0.5 + 0.7 = 1.2, \quad \hat{r}_k^3(x_4) = 0.$$

Y las puntuaciones según Black II son:

$$\hat{r}_k^4(x_1) = 0.7 + 0.6 + 1 = 2.3, \quad \hat{r}_k^4(x_2) = 0.8 - 0.7 = 0.1, \quad \hat{r}_k^4(x_3) = 0.7 - 0.6 = 0.1,$$

$$\hat{r}_k^4(x_4) = -1 - 0.8 - 0.7 = -2.5.$$

Así, a la vista de los resultados relativos a las alternativas x_2 y x_3, se observa que la correspondencia entre las puntuaciones otorgadas por Black I y Black II no sólo no puede venir dada mediante una transformación afín creciente, como en los casos discreto y gradual en sentido amplio, sino que tampoco puede derivarse de transformaciones funcionales más generales. El mismo argumento es válido para $\hat{r}_k^1$ y $\hat{r}_k^4$, toda vez que en el anterior ejemplo, al no existir más indiferencias que la de una alternativa consigo misma, los contadores $\hat{r}_k^1$ y $\hat{r}_k^3$ asignan las mismas puntuaciones, por lo que de nuevo se puede hacer valer el razonamiento anterior.

Los contadores de Borda graduales individuales en sentido restringido recorren intervalos, y el rango de recorrido coincide con el de sus homólogos en sentido amplio. Ahora bien, en cuanto al cómputo total de puntuaciones otorgadas por cada agente se obtienen desigualdades (que únicamente serían igualdades en el caso límite en que las preferencias del agente fuesen taxativamente órdenes lineales), salvo en el caso del último contador, que de nuevo se anula:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^1(x_i) \leq (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^2(x_i) \leq (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + n \cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^3(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r}_k^2(x_i) - 0.5\right) \leq \frac{n^2}{2} - n \cdot 0.5 = \frac{(n-1)n}{2}.$

- $\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^4(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}>0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ji}>0.5}}^{n} r_{ji}^k \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}>0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ji}>0.5}}^{n} r_{ji}^k = 0$.

Para verificar que la última expresión es nula téngase en cuenta que si $r_{ij}^k > 0.5$ contabiliza como positivo por ser un elemento de la fila *i*, también lo hace con el mismo valor y signo contrario por pertenecer a la columna j.

De nuevo, con los contadores individuales considerados se construye uno colectivo en cada caso:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^\nu(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \hat{r}_k^\nu(x_i), \;\; \nu = 1, \ldots, 4.$$

Y también alguno de los contadores colectivos se puede expresar a través de la matriz agregada $\left(\hat{r}_{ij}\right)$ como sigue:

- $\hat{\boldsymbol{r}}^1(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{ij}$.

- $\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_i) = \sum_{j=1}^{n} (\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mathrm{mg}}(i, j)$.

Como única relación entre los contadores colectivos podemos consignar

$$\hat{\boldsymbol{r}}^3(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \left(\hat{r}_k^2(x_i) - 0.5 \right) = \hat{\boldsymbol{r}}^2(x_i) - \frac{m}{2}.$$

Ahora, las relaciones de preferencia colectivas $P_\nu^{\hat{B}}$ vienen dadas por: $x_i P_\nu^{\hat{B}} x_j \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}}^\nu(x_i) > \hat{\boldsymbol{r}}^\nu(x_j), \;\; \nu = 1, \ldots, 4,$ y resultará(n) elegida(s) en cada caso la(s) alternativa(s) con mayor puntuación.

Observación 10. En lo que respecta a la equivalencia de contadores, obviamente se tiene $P_2^{\hat{B}} = P_3^{\hat{B}}$. Por otro lado, también sabemos ya que los contadores de Black inducen ordenaciones colectivas (o si se quiere, generan reglas de votación) esencialmente distintas, es decir $P_3^{\hat{B}} \neq P_4^{\hat{B}}$. En cuanto a los contadores primero y cuarto, ya ha sido probado, y con el mismo contraejemplo, que $P_1^{\hat{B}} \neq P_4^{\hat{B}}$. Y también se tiene $P_1^{\hat{B}} \neq P_3^{\hat{B}}$: sirve para comprobar este último aserto el Ejemplo 1 de García Lapresta – Martínez

Panero (2003), sin más que cambiar los contadores allí empleados por sus homólogos en este contexto, $\hat{\boldsymbol{r}}^1$ y $\hat{\boldsymbol{r}}^3$, permaneciendo las puntuaciones en ambos casos inalteradas.

3. Representatividad de los contadores de Borda graduales

En el contexto en que nos encontramos parece lógico e inexcusable el que cada agente, al puntuar cualesquiera dos alternativas mediante los contadores de Borda individuales (ya sea en sentido amplio o restringido), asigne una mayor puntuación a aquella alternativa sobre la que manifiesta mayor intensidad de preferencia (o, si se quiere, que es preferida a la otra según la relación de preferencia ordinaria inducida). Sería deseable, por tanto, que los contadores de Borda individuales fuesen representativos de las preferencias de los agentes tal como se formaliza a continuación.

Definición 12. El contador de Borda individual en sentido amplio $\overline{r}_k^v$, $v = 1,\ldots,4$, es *representativo de* R^k si se verifica $x_i \succ_{0.5}^k x_j \;\Rightarrow\; \overline{r}_k^v(x_i) > \overline{r}_k^v(x_j)$, para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Definición 13. El contador de Borda individual en sentido restringido $\hat{r}_v^k$, $v = 1,\ldots,4$, es *representativo de* R^k si se verifica $x_i \succ_{0.5}^k x_j \;\Rightarrow\; \hat{r}_k^v(x_i) > \hat{r}_k^v(x_j)$, para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

La transitividad denominada max-max débil no estricta ($\overline{T}_3$) es una condición suficiente para que los contadores graduales individuales en sentido amplio (a excepción del primero de ellos) estén dotados de la propiedad de consistencia interna de representatividad anteriormente definida.

Proposición 2. Si $R^k \in \overline{T}_3(X)$, entonces los contadores $\overline{r}_k^2, \overline{r}_k^3$ y $\overline{r}_k^4$ son representativos de R^k.

Demostración. Puesto que los contadores en cuestión son equivalentes, basta con demostrarlo para $v = 2$. Supongamos $x_i \succ_{0.5}^k$, es decir $r_{ij}^k > 0.5$. Veamos entonces que, bajo la hipótesis de coherencia difusa $\overline{T}_3$ se verifica $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ para cualquier $x_l \in X$. Distinguiremos varios casos, excluyentes y exhaustivos:

- Si $r_{jl}^k \geq 0.5$, entonces $r_{il}^k \geq \max\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\} \geq r_{jl}^k$.

- Si $r_{jl}^k < 0.5$ y $r_{il}^k \leq 0.5$, por reciprocidad se tendrá $r_{li}^k \geq 0.5$. Entonces, $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} \geq r_{li}^k$, de donde, $1 - r_{lj}^k \leq 1 - r_{li}^k$ y, de nuevo por reciprocidad, $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$.
- Si $r_{jl}^k < 0.5$ y $r_{il}^k > 0.5$, entonces la desigualdad $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ se verifica trivialmente.

Además, por ser $r_{ij}^k > 0.5$, la desigualdad $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ es estricta al menos en los casos $l = i$ y $l = j$. Por tanto $\overline{r}_k^2(x_i) = \sum_{l=1}^{n} r_{il}^k > \sum_{l=1}^{n} r_{jl}^k = \overline{r}_k^2(x_j)$. ■

Observación 11. Bajo las mismas hipótesis de la proposición anterior, el primer contador gradual individual en sentido amplio puede no ser representativo, como queda manifiesto en el Ejemplo 1, en el que un agente se manifiesta sobre tres alternativas mediante la matriz de intensidades de preferencia

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que la relación de preferencia difusa de tal agente pertenece a $\overline{T}_3(X)$. Sin embargo $x_2 \succ_{0.5}^k x_3$ puesto que $r_{23}^k = 0.6 > 0.5$ mientras el primer contador de Borda en sentido amplio invierte dicha relación: $\overline{r}_k^1(x_2) = 0.6 < 0.8 = 0.4 + 0.4 = \overline{r}_k^1(x_3)$.

Pasamos a tratar la representatividad de los contadores de Borda graduales en sentido restringido, esto es, los que consideran únicamente intensidades de preferencia mayores o iguales que 0.5. Veremos que, bajo ciertas condiciones más fuertes que en el caso amplio, todos ellos son representativos. En lo que al primer contador se refiere y desde un punto de vista heurístico, tal vez pudiera conjeturarse, por analogía con el caso discreto, que la transitividad de $\succ_{0.5}^k$, esto es, la condición $\hat{T}_0$, garantizaría la representatividad de $\hat{r}_k^1$. Sin embargo, en García Lapresta – Martínez Panero (2002) probamos que esta propiedad no es suficiente, y enunciamos una condición de transitividad difusa que sí asegura la consistencia interna del método propuesto, a saber, la que hemos denominado transitividad difusa max-max débil estricta ($\hat{T}_3$).

Proposición 3. Si $R^k \in \hat{T}_3(X)$, entonces el contador $\hat{r}_k^1$ es representativo de R^k.

Demostración. Para cada $i \in \{1,...,n\}$ tómese el conjunto $P(i) = \{l \mid r_{il}^k > 0.5\} \subset \{1,...,n\}$. Entonces, $\hat{r}_k^1(x_i) = \sum_{l \in P(i)} r_{il}^k$ y $\hat{r}_1^k(x_j) = \sum_{l \in P(j)} r_{jl}^k$. Supongamos $r_{ij}^k > 0.5$. Veamos que $P(j) \subset P(i)$: si $l \in P(j)$, entonces $r_{jl}^k > 0.5$. Por hipótesis, $r_{ij}^k > 0.5$, luego $r_{il}^k \geq \max\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\} > 0.5$ y así $l \in P(i)$. Nótese que la inclusión es estricta, pues $r_{ij}^k > 0.5$ implica $j \in P(i)$, mientras que $j \notin P(j)$, pues por la reciprocidad $r_{jj}^k = 0.5$. Entonces, en $\hat{r}_k^1(x_i)$ hay más sumandos que en $\hat{r}_k^1(x_j)$. Veamos ahora que cada sumando en $\hat{r}_k^1(x_i)$ es mayor o igual que el correspondiente en $\hat{r}_k^1(x_j)$. Para ello debe tenerse en cuenta que si $l \in P(j) \subset P(i)$, entonces se verifica $r_{il}^k \geq \max\left\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\right\} \geq r_{jl}^k$ y, en consecuencia, $\hat{r}_k^1(x_i) = \sum_{l \in P(i)} r_{il}^k > \sum_{l \in P(i)} r_{jl}^k = \hat{r}_k^1(x_j)$. ■

Proposición 4. Si $R^k \in \hat{T}_3(X)$, entonces el contador $\hat{r}_k^4$ es representativo de R^k.

Demostración. Supongamos $r_{ij}^k > 0.5$. Replicando exactamente la misma demostración de la proposición anterior se deduce $\sum_{\substack{l=1 \\ r_{il}^k > 0.5}}^n r_{il}^k > \sum_{\substack{l=1 \\ r_{jl}^k > 0.5}}^n r_{jl}^k$. Análogamente, si denominamos $Q(i) = \{l \mid r_{li}^k > 0.5\} \subset \{1,...,n\}$, entonces se puede probar $Q(i) \subset Q(j)$: si $l \in Q(i)$, entonces $r_{li}^k > 0.5$. Por hipótesis, $r_{ij}^k > 0.5$, luego $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} > 0.5$ y así $l \in Q(j)$. Nótese que la inclusión es estricta, pues $r_{ij}^k > 0.5$ implica $i \in Q(j)$, mientras que $i \notin Q(i)$, pues por la reciprocidad $r_{ii}^k = 0.5$. Además, si $l \in Q(i) \subset Q(j)$ se verifica $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} \geq r_{li}^k$ y, en consecuencia, $\sum_{\substack{l=1 \\ r_{lj}^k > 0.5}}^n r_{lj}^k = \sum_{l \in Q(j)} r_{lj}^k > \sum_{l \in Q(i)} r_{li}^k = \sum_{\substack{l=1 \\ r_{li}^k > 0.5}}^n r_{li}^k$.

De las anteriores desigualdades entre sumatorios se obtiene

$$\sum_{\substack{l=1 \\ r_{il}^k > 0.5}}^n r_{il}^k + \sum_{\substack{l=1 \\ r_{lj}^k > 0.5}}^n r_{lj}^k > \sum_{\substack{l=1 \\ r_{jl}^k > 0.5}}^n r_{jl}^k + \sum_{\substack{l=1 \\ r_{li}^k > 0.5}}^n r_{li}^k,$$

de donde

$$\hat{r}_k^4(x_i) = \sum_{\substack{l=1 \\ r_{il}^k > 0.5}}^{n} r_{il}^k - \sum_{\substack{l=1 \\ r_{li}^k > 0.5}}^{n} r_{li}^k > \sum_{\substack{l=1 \\ r_{jl}^k > 0.5}}^{n} r_{jl}^k - \sum_{\substack{l=1 \\ r_{lj}^k > 0.5}}^{n} r_{lj}^k = \hat{r}_k^4(x_j). \quad \blacksquare$$

Proposición 5. Si $R^k \in \hat{T}_3(X)$, entonces los contadores $\hat{r}_k^2$ y $\hat{r}_k^3$ son representativos de R^k.

Demostración. Por tratarse de contadores equivalentes, basta realizar la prueba para $\hat{r}_k^2$. Para cada $i \in \{1,...,n\}$ considérese el conjunto $S(i) = \{l \mid r_{il}^k \geq 0.5\} \subseteq \{1,...,n\}$. Entonces, $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{l \in S(i)} r_{il}^k$ y $\hat{r}_2^k(x_j) = \sum_{l \in S(j)} r_{jl}^k$. Supongamos $r_{ij}^k > 0.5$. Veamos en primer lugar que $S(j) \subseteq S(i)$: si $l \in S(j)$, entonces $r_{jl}^k \geq 0.5$. Por reducción al absurdo, supongamos $l \notin S(i)$, es decir, $r_{il}^k < 0.5$. Por reciprocidad $r_{li}^k > 0.5$, y entonces $r_{lj}^k \geq \max\left\{r_{li}^k, r_{ij}^k\right\} > 0.5$, lo que contradice $r_{jl}^k \geq 0.5$.

En segundo lugar, veamos que los sumandos que intervienen en $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{l \in S(i)} r_{il}^k$ son mayores o iguales que los correspondientes en $\hat{r}_2^k(x_j) = \sum_{l \in S(j)} r_{jl}^k$, es decir que para cualquier $l \in S(j)$ se cumple $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$. Notemos que $l \in S(j) \subseteq S(i)$ implica $r_{il}^k \geq 0.5$ y $r_{jl}^k \geq 0.5$. Razonemos de nuevo por reducción al absurdo y supongamos $r_{il}^k < r_{jl}^k$. Pero a la vez debe ser $r_{il}^k \geq \max\left\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\right\} \geq r_{jl}^k$, lo que es imposible.

Por fin, veamos que alguna de las desigualdades $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ válidas para $l \in S(j)$ es estricta. Efectivamente, $j \in S(i)$ verifica $r_{ij}^k > 0.5$ y $j \in S(j)$ cumple $r_{jj}^k = 0.5$. En consecuencia $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{l \in S(i)} r_{il}^k > \sum_{l \in S(j)} r_{jl}^k = \hat{r}_2^k(x_j)$. $\blacksquare$

4. Análisis de Condorcet en el marco difuso

Asumiendo en lo que sigue las hipótesis de racionalidad sobre las preferencias individuales señaladas, consideremos las matrices agregadas en sentidos amplio $\left(\bar{r}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(r_{ij}^k\right)$ y restringido $\left(\hat{r}_{ij}\right) = \bigoplus_{k=1}^{m}\left(r_{ij}^k\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{m} (r_{ij}^k)$. Se definen a continuación los conceptos de alternativa ganadora y perdedora de Condorcet en cada caso por analogía con el discreto.

Definición 14. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet en sentido amplio* si y sólo si el margen en sentido amplio sobre el resto de alternativas es positivo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i vence al resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido amplio. Formalmente, $j \neq i \;\Rightarrow\; \overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji} > 0.$

Definición 15. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet en sentido restringido* si y sólo si el margen en sentido restringido sobre el resto de alternativas es positivo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i vence al resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido restringido. Formalmente, $j \neq i \;\Rightarrow\; \hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji} > 0.$

Definición 16. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet en sentido amplio* si y sólo si el margen en sentido amplio sobre el resto de alternativas es negativo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i es vencida por el resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido amplio. Formalmente, $j \neq i \;\Rightarrow\; \overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji} < 0.$

Definición 17. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet en sentido restringido* si y sólo si el margen en sentido restringido sobre el resto de alternativas es negativo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i es vencida por el resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido restringido. Formalmente, $j \neq i \;\Rightarrow\; \hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji} < 0.$

Es claro que, caso de existir, de la definición de alternativa ganadora (respectivamente perdedora) de Condorcet, en cualquiera de sus variantes, se sigue su unicidad.

A continuación sigue un análisis paralelo al de García Lapresta – Martínez Panero (2003) sobre la conexión entre los contadores Borda graduales y el enfoque de Condorcet. Comenzamos por los contadores en sentido amplio, para los que (exceptuando el primer contador) se pueden generalizar los resultados y demostraciones del citado trabajo, ponderando ahora intensidades de preferencia, en lugar de contabilizar cardinales.

Proposición 6. Una alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca será la peor puntuada por la regla de Borda si se emplean los contadores $\overline{\boldsymbol{r}}^2$, $\overline{\boldsymbol{r}}^3$ y $\overline{\boldsymbol{r}}^4$.

Demostración. Teniendo en cuenta la equivalencia entre los contadores $\bar{\boldsymbol{r}}^2$, $\bar{\boldsymbol{r}}^3$ y $\bar{\boldsymbol{r}}^4$ respecto de la preferencia colectiva, basta considerar la regla de Borda asociada a $\bar{\boldsymbol{r}}^4$ y utilizar, por tanto, los contadores individuales $\bar{r}_k^4$, $k = 1,\ldots,m$. Supongamos que la alternativa x_i es ganadora de Condorcet, es decir, para cualquier alternativa $x_j \neq x_i$ se verifica $\bar{r}_{ij} > \bar{r}_{ji}$. Para justificar que x_i no puede obtener la peor puntuación con $\bar{\boldsymbol{r}}^4$, basta demostrar que $\bar{\boldsymbol{r}}^4(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^4(x_i) > 0$, ya que, como ha sido puesto de manifiesto, se cumple $\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_k^4(x_j) = 0$ y, en consecuencia, la puntuación total media es

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{\boldsymbol{r}}^4(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^4(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_k^4(x_j) = 0\,.$$

El hecho de que $\bar{\boldsymbol{r}}^4(x_i)$ fuera positiva obligaría a que existiera alguna alternativa con puntuación negativa, luego peor puntuada que x_i. Y esto es inmediato, ya que por ser x_i ganadora de Condorcet, se tiene $\bar{r}_{ij} > \bar{r}_{ji}$, de donde $\boldsymbol{r}^4(x_i) = \bar{r}_{ij} - \bar{r}_{ji} > 0$. ■

Observación 12. El contador $\bar{\boldsymbol{r}}^1$ puede dar la peor puntuación Borda a la alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio. Véase a este respecto, trasladada a este contexto, la Observación 12 de García Lapresta – Martínez Panero (2003).

También se verifica que la regla de Borda en sentido amplio excluye a la alternativa perdedora de Condorcet. Enunciamos este resultado formalmente, pero omitimos su demostración, que se puede hacer sin más que trasladar la del caso discreto a este contexto con la misma filosofía que en la proposición anterior.

Proposición 7. Ninguna alternativa perdedora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, puede resultar ganadora por la regla de Borda si se emplean los contadores $\bar{\boldsymbol{r}}^2$, $\bar{\boldsymbol{r}}^3$ y $\bar{\boldsymbol{r}}^4$. ■

Observación 13. El contador $\bar{\boldsymbol{r}}^1$ puede dar la mejor puntuación a la alternativa perdedora de Condorcet. Véase a este respecto la Observación 13 de García Lapresta – Martínez Panero (2003) para el contador homólogo discreto.

En el caso restringido se tienen tres clases de equivalencia de contadores respecto de la preferencia colectiva inducida: la formada por el primer contador, la integrada por los contadores segundo y tercero, y la que viene dada por el cuarto contador. Este último mantiene las buenas propiedades de Condorcet de sus homólogos en los casos discreto y gradual en sentido amplio. Enunciamos la correspondiente proposición y de nuevo omitimos la demostración, basada de nuevo en la propiedad

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_k^4(x_j) = 0.$$

Proposición 8. Una alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio nunca será la peor puntuada por la regla de Borda si se emplea el contador $\hat{\boldsymbol{r}}^4$. Así mismo, ninguna alternativa perdedora de Condorcet en sentido amplio puede resultar ganadora por la regla de Borda generalizada si se emplea dicho contador. ■

CONCLUSIONES

En nuestro enfoque gradual de la regla de Borda hemos sugerido dos vías de aproximación que hemos denominado sentidos amplio y restringido. Como hemos comentado, ambas posibilidades nos parecen, en principio, legítimas, y cada una de ellas aporta contadores adecuados, al menos en la misma manera en que lo eran los correspondientes discretos. Ahora bien, ningún contador en sentido amplio es equivalente a ningún otro en sentido restringido; es decir, para idénticas configuraciones de preferencias individuales de los agentes y según la vía que se siga, se pueden obtener preferencias colectivas esencialmente distintas. Por supuesto, este hecho no debe resultar paradójico para quienquiera que haya tratado mínimamente con distintos sistemas de votación, donde esta situación se da a menudo (a este respecto véase, por ejemplo, Saari (2001, pp. 1-20). Y tampoco en nuestro contexto debería parecer extraño, toda vez que los contadores en sentido restringido truncan parte de la información (por ser insustancial desde su punto de vista), a saber, las intensidades menores que 0.5 en las preferencias individuales de los agentes (que sí son significativas en sentido amplio).

BIBLIOGRAFÍA

1. Bezdek, J.C. – Harris, J.D. (1978): “Fuzzy partitions and relations: an axiomatic basis for clustering”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, pp. 111-127.

2. Bezdek, J.C. – Spillman, B. – Spillman, R. (1979): “Fuzzy relation spaces for group decision theory: An application”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2, pp. 5-14.

3. Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

4. Black, D. (1976): “Partial justification of the Borda count”. *Public Choice*, 28, pp. 1-16.

5. Dasgupta, M. – Deb, R. (1996): “Transitivity and Fuzzy Preferences”. *Social Choice and Welfare*, 13, pp. 305-318.

6. De Baets, B. – De Meyer, H. – De Shuymer, B. – Jenny, S. (2003): “Cycle-transitivity of reciprocal relations”. En B. de Baets – J. Fodor (eds.): *Principles of Fuzzy Preference Modelling and Decision Making*, Academia Press, Gante, pp. 165-181.

7. Fishburn, P.C. (1970): *Utility Theory for Decision Making,* Wiley, Nueva York.

8. Fishburn, P.C. (1973): “Binary choice probabilities: On the varieties of stochastic transitivity”. *Journal of Mathematical Psychology,* 10, pp. 327-352.

9. García Lapresta (en prensa): “A general class of simple majority decision rules based on linguistic opinions”. *Information Sciences.*

10. García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (2000): “Aggregation of fuzzy preferences: Some rules of the mean”. *Social Choice and Welfare*, 17, pp. 673-690.

11. García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (2003): “An axiomatic characterization of fuzzy decision rules based on difference of votes”. *Proceedings of the 10th International Fuzzy Systems Association World Congress*, Estambul, pp. 91-94.

12. García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002): “Borda count versus approval voting: A fuzzy approach”. *Public Choice*, 112, pp. 167-184.

13. García Lapresta, J.L. –Martínez Panero, J.L. (2003): “Extensiones discretas de la regla de Borda: Un estudio comparativo. *XVII Reunión Anual Asepelt,* Almería, Actas en CD-ROM.

14. López de Peñalver, J. (1992): *Escritos,* Instituto de Cooperación Iberoamericana – Quinto Centenario – Antoni Bosch, editor – Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Edición de Ernest Lluch de la obra original, 1799].

15. Luce, D. (1956): “Semiorders and a theory of utility discrimination”. *Econometrica*, 24, pp. 178-191.

16. Marchant, T. (1996): *Agrégation de relations valuées par la méthode de Borda en vue d’un rangement. Considérations axiomatiques.* Ph. D. Thesis, Université Libre de Bruxelles, Bruselas.

17. Marchant, T. (2000): “Does the Borda Rule provide more than a ranking?”. *Social Choice and Welfare*, 17, pp. 381-391.

18. May, K.O. (1952): “A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision”. *Econometrica*, 20, pp. 680-684.

19. Metfessel, M. (1947): “A proposal for quantitative reporting of comparative judgements”. *Journal of Psychology*, 24, pp. 229-235.

20. Morales, J.I. (1797): *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*, Imprenta Real, Madrid.

21. Morales, J.I. (1805): *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*, Imprenta de Sancha, Madrid.

22. Nurmi, H. (1981): “Approaches to collective decisión making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 6, pp. 249-259.

23. Saari, D.G. (2001): *Decisions and Elections. Explaining the Unexpected*, Cambridge University Press, Cambridge.

24. Straffin Jr., P.D. (1980): *Topics in the Theory of Voting*, Birkhäuser, Boston.

25. Tanino, T. (1984): “Fuzzy preference orderings in group decision making”. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, pp. 117-131.

26. Von Neumann, J. – Morgenstern, O. (1953): *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.

27. Zadeh, L.A. (1965): “Fuzzy sets”. *Information and Control*, 8, pp. 338-353.

28. Zadeh, L.A. (1971): “Similarity relations and fuzzy orderings”. *Information Sciences*, 3, pp. 177-200.